

EINE ZERLEGUNG VON NICHTKOMPAKTEN 3- MANNIGFALTIGKEITEN

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

Ute Dederek-Breuer

Bochum 1980



Digitized by the Internet Archive
in 2026

EINE ZERLEGUNG VON NICHTKOMPAKTEN 3- MANNIGFALTIGKEITEN

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

Ute Dederek-Breuer

Bochum 1980



Dissertation eingereicht am: 17.10.1980

Tag der mündlichen Prüfung: 8.12.1980

Referent: Prof. Dr. H. Zieschang

Korreferent: Prof. Dr. A. Duma

ZUSAMMENFASSUNG

Dederek-Breuer, Ute

EINE ZERLEGUNG VON NICHTKOMPAKTEN 3-MANNIGFALTIGKEITEN

Sei M eine nichtkompakte 3-Mannigfaltigkeit mit einem Ende. Wir beschäftigen uns mit der Frage, unter welchen Voraussetzungen sich M durch Schnitte längs Ebenen in einfachere Teilstücke zerlegen läßt und inwieweit diese *Bausteine* eindeutig bestimmt sind. Es gilt: M sei eine offene, irreduzible, fast-endirreduzible 3-Mannigfaltigkeit mit einem Ende, und es gebe eine obere Schranke $z_M \in \mathbb{N}$ für M , so daß $\text{card}(I) \leq z_M$ für jede maximale Menge $\{E_i\}_{i \in I}$ disjunkter, wesentlicher, nichtparalleler, eigentlich in M eingebetteter und zerlegender Ebenen. Ist M keine triviale Zelle, so ist M fast-homöomorph zu einer Sternsumme $P_1 * \dots * P_n$ von $*$ -primen Mannigfaltigkeiten P_i , $i = 1, \dots, n$. Die Summanden P_i sind bis auf Reihenfolge und Fast-Homöomorphie eindeutig bestimmt.

Am Ende der Arbeit beschreiben wir eine Klasse von 3-Mannigfaltigkeiten, die alle Voraussetzungen für den Zerlegungssatz erfüllen: M sei eine zusammenhängende, offene, irreduzible 3-Mannigfaltigkeit von endlichem Geschlecht in ∞ . Ist M keine triviale Zelle, ist M fast-homöomorph zu einer Sternsumme $P_1 * \dots * P_n$ von $*$ -primen Mannigfaltigkeiten P_i , $i = 1, \dots, n$. Die Summanden P_i sind bis auf Reihenfolge und Fast-Homöomorphie eindeutig bestimmt.

Schließlich geben wir noch ein Beispiel für eine Mannigfaltigkeit dieser Klasse, das sich als Summe endlich vieler Kopien von J.H.C. Whitehead's zusammenziehbarer, offener Menge darstellen läßt.

INHALT

1 Einleitung	1
2 Vorbereitungen	6
3 Wesentliche und nicht-wesentliche Ebenen	13
4 Hilfssätze	20
5 Der Zerlegungssatz	26
6 Mannigfaltigkeiten mit endlichem Geschlecht in ∞ - ein Beispiel	49
Symbolverzeichnis	53
Literatur	54

1 EINLEITUNG

Wenn man sich mit der Klassifikation von Mannigfaltigkeiten beschäftigt, liegt es nahe, die Mannigfaltigkeiten in einfache Stücke zu zerlegen. Gelingt es, diese Bausteine zu bestimmen und jeder Mannigfaltigkeit eindeutig eine Zerlegung zuzuordnen, ist das Klassifikationsproblem gelöst.

Im Fall von kompakten 3-Mannigfaltigkeiten stammt eine wichtige Zerlegungsmethode von J. Milnor. Er zeigt, daß jede kompakte 3-Mannigfaltigkeit die zusammenhängende Summe (als Zeichen $\#$), einer endlichen Anzahl von Primfaktoren ist [M]. Die zusammenhängende Summe zweier 3-Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 wird gebildet, indem man im Innern von M_1 und M_2 jeweils einen 3-Ball entfernt und dann die beiden entstandenen 2-Sphären in M_1 und M_2 identifiziert.

Der Begriff *Primfaktor* bei den verschiedenen Zerlegungsmethoden erklärt sich immer aus den Flächen, an denen zerlegt wird. Bei Milnor's zusammenhängender Summe zum Beispiel bedeutet, daß eine Mannigfaltigkeit M prim ist, daß, falls $M \approx M_1 \# M_2$, entweder M_1 oder M_2 eine 3-Sphäre ist. Die S^3 ist also hier der triviale Baustein.

Ein anderes Zerlegungstheorem stammt von J. Gross:

Ist M eine orientierbare, zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit mit einer Randkomponente und ist M kein 3-Ball, so ist M homöomorph zu einer Scheibensumme (als Zeichen Δ) von Δ -primen 3-Mannigfaltigkeiten. Die Summanden sind bis auf Reihenfolge und Homöomorphie eindeutig bestimmt [G].

J. Gross bildet die Scheibensumme zweier 3-Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 , indem er zwei Scheiben im Rand von M_1 und M_2 identifiziert.

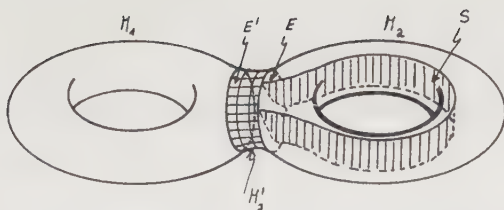


Die triviale Mannigfaltigkeit ist hier der 3-Ball, und M heißt Δ -prim, wenn bei jeder Zerlegung $M \approx M_1 \Delta M_2$ entweder M_1 oder M_2 ein 3-Ball ist. Der Volltorus ist zum Beispiel Δ -prim.

Wir wollen uns in dieser Arbeit mit der Zerlegung von nichtkompakten 3-Mannigfaltigkeiten mit einem Ende beschäftigen (ein Ende einer Mannigfaltigkeit M ist eine Äquivalenzklasse von Halbgeraden in M , die alle in "eine Richtung" zeigen), und dabei die Zerlegungsmethode von J. Gross verallgemeinern. Die erste Idee, die man dazu hat, ist, alle Begriffe auf den nichtkompakten Fall zu übertragen. Also

$$\begin{aligned} \text{Scheibe} &\rightsquigarrow \text{Ebene} (\approx \mathbb{R}^2) \\ \text{3-Ball} &\rightsquigarrow \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Mit diesen Definitionen stößt man jedoch sehr schnell auf Schwierigkeiten. Zerlegt man zum Beispiel eine offene 3-Mannigfaltigkeit M an einer Ebene E in zwei Teilmannigfaltigkeiten M_1 und M_2 , sind M_1 und M_2 nicht mehr offen, sondern haben jeweils eine Kopie von E im Rand. Sei $E' \subset M_1$ eine Ebene, die parallel zu E ist. E' zerlegt M_1 in M'_1 und M'_2 , wobei $M'_1 \approx M_1$ und $M'_2 \approx \mathbb{R}^2 \times [0,1]$.



Es kann also nicht genügen, als triviale Mannigfaltigkeit den $\mathbb{R}^3$ zu definieren. Ebenso ist die Verallgemeinerung Scheibe $\rightsquigarrow$ Ebene nicht weit genug. Zum Beispiel ist es sinnvoll, M_2 an $S \approx \mathbb{R}^1 \times [0,1]$ aufzuschneiden. Wir werden daher verallgemeinern:

Scheibe $\longrightarrow$ Stern

3-Ball $\longrightarrow$ triviale Zelle.

Dabei ist ein Stern fast eine Ebene, nur daß gewisse Randkomponenten zugelassen sind, und eine triviale Zelle ist fast der $\mathbb{R}^3$. Mit diesen Begriffen können wir beweisen:

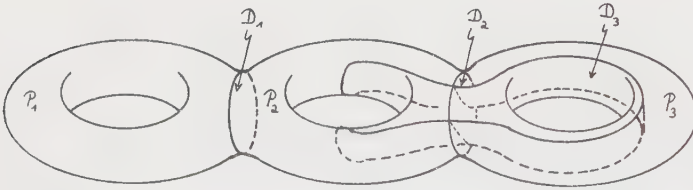
5.12 ZERLEGUNGSSATZ

Sei M eine offene, irreduzible, fast-endirreduzible 3-Mannigfaltigkeit mit einem Ende, und es gebe eine obere Schranke $z_M \in \mathbb{N}$ für M , so daß $\text{card}(I) \leq z_M$ für jede maximale Menge $\{E_i\}_{i \in I}$ disjunkter, wesentlicher, nichtparalleler, eigentlich in M eingebetteter und zerlegender Ebenen. Ist M keine triviale Zelle, so ist M fast-homöomorph zu einer Sternsumme $P_1 * \dots * P_n$ von $*$ -primen Mannigfaltigkeiten P_i , $i = 1, \dots, n$. Die Summanden P_i sind bis auf Reihenfolge und Fast-Homöomorphie ein-

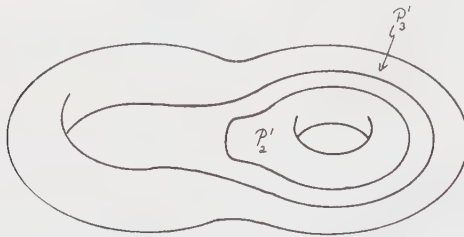
deutig bestimmt.

Eine Schwierigkeit, die beim Beweis dieses Zerlegungssatzes auftaucht, wollen wir im kompakten Fall erläutern:

Sei M die Vollbrezel vom Geschlecht 3 und D_1, D_2, D_3 Scheiben wie im Bild.



Dann gilt $M \approx P_1 \Delta_{D_1} P_2 \Delta_{D_2} P_3$. Die Scheibe D_3 zerlegt $P_2 \Delta P_3$ in zwei Teilmannigfaltigkeiten P'_2 und P'_3 mit $P_2 \Delta P_3 \approx P'_2 \Delta P'_3$.



D_2 zerlegt D_3 in drei Teilscheiben, wovon zwei, D_3^1 und D_3^2 , in P_2 liegen. Aber weder D_3^1 noch D_3^2 zerlegt allein den Primteil P_2 , obwohl D_3 eine zerlegende Scheibe ist.

Außerdem existiert keine Isotopie, mit der man D_3^1 und D_3^2 aus P_2 herausziehen könnte.

Daß die hier beschriebene Situation auftreten kann, ist der Grund für die umständlichen Betrachtungen im dritten Schritt von Abschnitt 5 und die Hilfssätze in Abschnitt 4.

Wir wollen jetzt noch eine kurze Übersicht über die Abschnitte dieser Arbeit geben.

Abschnitt 2 Hier werden die wichtigsten Definitionen und Bezeichnungen zusammengestellt.

Abschnitt 3 Wir untersuchen Einbettungen des $\mathbb{R}^2$ in eine bestimmte Klasse von 3-Mannigfaltigkeiten. Der Satz 3.4 beschreibt die Ebenen, die triviale Zellen abschneiden, und der Satz 3.5, wann zwischen zwei eingebetteten Ebenen nur eine triviale Zelle liegt.

Abschnitt 4 Dieser Abschnitt ist nur zum Nachschlagen gedacht. Wir haben hier eine Reihe von Hilfssätzen für den Beweis des Zerlegungssatzes zusammengestellt.

Abschnitt 5 Wir beweisen den Zerlegungssatz in 3 Schritten.

Abschnitt 6 Wir beschreiben eine überabzählbare Klasse von 3-Mannigfaltigkeiten, die den Voraussetzungen des Zerlegungssatzes genügen, und wenden unser Ergebnis auf ein Beispiel an.

Symbolverzeichnis und Literatur finden sich am Ende.

Ich danke Herrn Prof. Dr. H. Zieschang für die Betreuung dieser Arbeit sowie C.D. Feustel für viele anregende Gespräche.

2 VORBEREITUNGEN

Wir verabreden Bezeichnungen, geben die wichtigsten Definitionen und beschreiben die Räume, mit denen wir arbeiten wollen.

2.1 ALLGEMEINES

Wir arbeiten in der Kategorie der lokal endlichen, abzählbaren Simplicialkomplexe und stückweise linearen (pl-) Abbildungen. Für $X \subset Y$ bezeichne $\text{cl}(X)$ den Abschluß (closure) von X in Y und ∂X den Rand von X .

Ist M eine Mannigfaltigkeit mit Teilmannigfaltigkeit T , so sei $\text{fr}(T)$ die Grenze (frontier) $\text{cl}(\partial T \cap (M - \partial M))$ von T in M und $\text{int}(M)$ das Innere (interior) von M , d.h. $\text{int}(M) = M - \partial M$. Der Begriff *eigentlich* für Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten wird in zweifacher Bedeutung gebraucht. Wir meinen hier immer die erste, und falls sinnvoll, beide Bedeutungen. Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt *eigentlich*, wenn für jede kompakte Teilmenge $C \subset N$, $f^{-1}(C)$ kompakt ist und wenn $f^{-1}(\partial N) = \partial M$ ist. Eine *eigentliche* Homotopie ist eine Homotopie, die *eigentlich* als Funktion beider Variablen ist.

Unter einer Mannigfaltigkeit werden wir eine orientierbare 3-Mannigfaltigkeit verstehen, die irreduzibel ist, d.h. in der jede 2-Sphäre einen 3-Ball berandet. Eine Fläche ist eine eventuell nicht kompakte, orientierbare 2-Mannigfaltigkeit.

2.2 ENDEN

Es sei K ein Simplicialkomplex. Zwei *eigentliche* Abbildungen $b, b': [0, \infty) \rightarrow K$ bestimmen dasselbe Ende (von K), wenn für jede belie-

bige kompakte Teilmenge C von K und $t \gg 0$ (t hinreichend groß), $b(t)$ und $b'(t)$ in derselben Komponente von $K-C$ liegen. Durch diese Definition wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller eigentlichen Abbildungen $b: [0, \infty) \rightarrow K$ definiert. Die Äquivalenzklasse von b heißt ein Ende von K .

Wenn man Aussagen über eine Mannigfaltigkeit M mit einem Ende beweisen will, liegt es nahe, sich zuerst eine kompakte Teilmannigfaltigkeit C_0 anzusehen und dann auf immer größer werdende Teilmannigfaltigkeiten $C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \dots$ überzugehen. Diese Idee steckt in der folgenden Definition.

2.2.1 DEFINITION

Sei K ein zusammenhängender Komplex. Eine ausschöpfende Sequenz von K ist eine Sequenz $\{C_n\}$ kompakter Teilmengen von K , so daß

$$C_n \subset C_{n+1} - \text{fr}(C_{n+1}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = K.$$

Da wir nur abzählbare Komplexe betrachten, existiert immer eine ausschöpfende Sequenz. Ist $\{C_n\}$ eine ausschöpfende Sequenz, so gilt das auch für jede Teilsequenz. Wir werden im Folgenden manchmal eine Teilsequenz einer ausschöpfenden Sequenz mit bestimmten Eigenschaften auswählen. Nachdem wir gezeigt haben, daß eine solche Teilsequenz existiert, werden wir so fortfahren, als hätte die ursprüngliche Sequenz die gewünschten Eigenschaften gehabt.

Es sei M eine 3-Mannigfaltigkeit und F eine Fläche, die entweder eigentlich in M eingebettet ist, oder in ∂M enthalten ist. F ist inkompressibel, wenn F keine 2-Sphäre ist und die Injektion $i: F \rightarrow M$ einen Monomorphismus $i_{\#}: \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$ induziert. Eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit M mit zusammenhängendem Rand heißt randirreduzibel, wenn

∂M inkompressibel in M ist. Dieser Begriff läßt sich auf Mannigfaltigkeiten mit einem Ende verallgemeinern.

2.2.2 DEFINITION

M sei eine zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit mit einem Ende. Dann ist M endirreduzibel, wenn es eine ausschöpfende Sequenz $\{C_n\}$ von M mit den folgenden Eigenschaften gibt,

- (i) C_n ist eine kompakte Teilmannigfaltigkeit von M , und
- (ii) $\text{fr}(C_n)$ ist inkompressibel in M für alle $n \in \mathbb{N}$.

Als Abschwächung definiert man:

2.2.3 DEFINITION

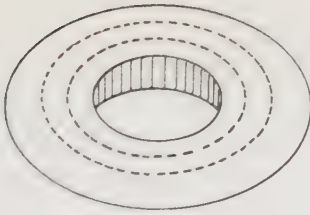
Eine zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit mit einem Ende ist fast-endirreduzibel, wenn es eine ausschöpfende Sequenz $\{C_n\}$ von M und eine kompakte Teilmenge $C \subset \text{int}(M)$ gibt, so daß gilt

- (i) C_n ist eine kompakte Teilmannigfaltigkeit von M , und
- (ii) $\text{fr}(C_n)$ ist inkompressibel in $\text{cl}(M - C)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Eine nichtkompakte Mannigfaltigkeit M ist also fast-endirreduzibel, wenn es eine kompakte Teilmannigfaltigkeit C gibt, so daß $\text{cl}(M - C)$ endirreduzibel ist.

2.2.4 BEISPIELE

- (1) Läßt man von einer kompakten Mannigfaltigkeit eine inkompressible Randkomponente weg, erhält man eine endirreduzible Mannigfaltigkeit.



zum Beispiel

$$\tilde{M} = \text{Torus} \times [0,1]$$

$$M = \tilde{M} - \{\text{Torus} \times \{1\}\}$$

M ist endirreduzibel

- (2) Entfernt man von einer kompakten Mannigfaltigkeit irgendeine Randkomponente, bekommt man eine fast-endirreduzible Mannigfaltigkeit.



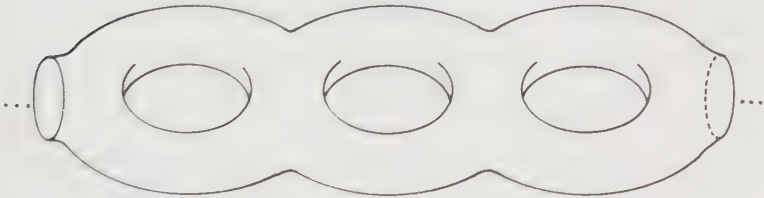
zum Beispiel

$$\tilde{M} = \text{Volltorus}$$

$$M = \text{int}(\tilde{M})$$

M ist fast-endirreduzibel

- (3) $\tilde{M}$ sei ein unendlicher Brezelkörper und $M = \text{int}(\tilde{M})$. M ist nicht fast-endirreduzibel.



- (4) Die Mannigfaltigkeiten mit endlichem Geschlecht in ∞ , mit denen wir uns im letzten Abschnitt dieser Arbeit beschäftigen wollen, sind alle fast-endirreduzibel (siehe [B2]).

2.3 SPEZIELLES

2.3.1 DEFINITION

Eine Fläche S heißt Stern, wenn S eine Scheibe ist, oder wenn $\text{int}(S)$ homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ und jede Randkomponente homöomorph zu $\mathbb{R}^1$ ist. Einen Stern ohne Rand wollen wir als Ebene bezeichnen.



In den nachfolgenden Abschnitten werden wir auf 3-Mannigfaltigkeiten stoßen, deren Ränder sich aus Sternen zusammensetzen. Um das beschreiben zu können, die folgende

2.3.2 DEFINITION

Sind S und $\tilde{S}$ zwei Sterne, so bildet man eine Summe von S und $\tilde{S}$, indem man eine Teilmenge $\{s^i\}_{i \in I}$ der Randkomponenten von S und eine Teilmenge $\{\tilde{s}^i\}_{i \in I}$ der Randkomponenten von $\tilde{S}$ auswählt und jedes s^i mit $\tilde{s}^i$ verklebt, so daß eine orientierbare 2-Mannigfaltigkeit entsteht.

Natürlich ist die Summe zweier Sterne nicht eindeutig definiert, sondern hängt von der Auswahl und Anzahl der verklebten Randbögen ab.

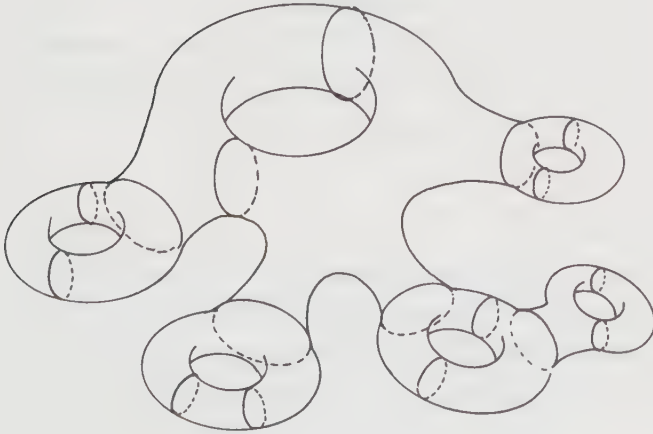
2.3.3 DEFINITION

B sei eine 3-Mannigfaltigkeit mit $\text{int}(B) \approx \mathbb{R}^3$. Dann ist B eine triviale Zelle, wenn es eine pl-Einbettung $b: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, und wenn jede Randkomponente von B eine Summe von Sternen ist.

Es sei T die Vereinigung einer endlichen Familie von 3-Bällen $B_1, \dots, B_n$, so daß der Schnitt eines jeden B_j mit der Vereinigung aller anderen Bälle B_i eine endliche Menge disjunkter Scheiben in ∂B_j ist. Ist T orientierbar und zusammenhängend, so heißt T ein Henkelkörper. Wir wollen diese Definition auf naheliegende Weise verallgemeinern.

2.3.4 DEFINITION

T sei die Vereinigung einer abzählbaren Familie trivialer Zellen $\{T_j\}_{j \in J}$, so daß der Durchschnitt jedes T_j mit der Vereinigung aller anderen trivialen Zellen T_i eine abzählbare Menge disjunkter Sterne in ∂T_j ist. Ist T orientierbar und zusammenhängend, so heißt T ein verallgemeinerter Henkelkörper.



2.3.5 DEFINITION

M und M' seien zwei 3-Mannigfaltigkeiten. Man bildet die Sternsumme $M * M'$ von M und M' , indem man einen Stern in ∂M mit einem Stern $\partial M'$ verklebt. Eine Mannigfaltigkeit P heißt $*$ -prim, wenn P keine triviale Zelle ist, und wenn immer P homöomorph zu einer Sternsumme $M * M'$ ist, entweder M oder M' eine triviale Zelle ist. In dem Spezialfall, daß es sich bei den Sternen, an denen man verklebt, um Ebenen handelt, spricht man von der Ebenensumme $M + M'$ und von ebenenprim (e-prim).

2.3.6 BEISPIEL

Der $\mathbb{R}^3$ ist das einfachste Beispiel für eine triviale Zelle. Bezeichnen H^+ und H^- den oberen bzw. unteren Halbraum, erhält man $H^+ *_{\mathbb{R}^2} H^- \approx \mathbb{R}^3$. (Hier kann man nach unserer Verabredung auch $H^+ +_{\mathbb{R}^2} H^- \approx \mathbb{R}^3$ schreiben, wenn man deutlich machen will, daß die beiden Halbräume an einer Ebene zusammengeklebt werden.) Der $\mathbb{R}^3$ geht also aus H^+ durch Anheften einer trivialen Zelle (H^-) hervor. Trotzdem ist natürlich H^+ nicht homöomorph zum $\mathbb{R}^3$. Um nun zu erreichen, daß das Ankleben von trivialen Zellen eine triviale Operation (bis auf Homöomorphie) bzgl. der Sternsumme ist, führen wir die folgende Definition ein.

2.3.7 DEFINITION

M und M' seien zwei orientierbare und zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeiten. M ist fast-homöomorph zu M' , $M \approx_f M'$, falls $\text{int}(M) \approx \text{int}(M')$ und ∂M und $\partial M'$ aus Summen von abzählbar vielen Sternen bestehen.

3 WESENTLICHE UND NICHT-WESENTLICHE EBENEN

Es sei M eine nichtkompakte Mannigfaltigkeit und $E_1, \dots, E_{m-1}$ seien eingebettete Ebenen, die M in Teilmannigfaltigkeiten $M_1, \dots, M_m$ zerlegen.

Unter welchen Voraussetzungen sind die Stücke M_i interessant, das heißt, keine trivialen Zellen? Dieser Frage wollen wir im folgenden Abschnitt nachgehen. Zu Anfang werden wir noch untersuchen, wie man die Ebenen $E_1, \dots, E_{m-1}$ bezüglich einer ausschöpfenden Sequenz $\{C_n\}$ von M in eine schöne Lage bringen kann.

3.1 BEZEICHNUNG

Wir wollen für diesen Abschnitt feste Bezeichnungen wählen. Ist M eine fast-endirreduzible 3-Mannigfaltigkeit, so sei mit $\{C_n\}$ eine ausschöpfende Sequenz kompakter Teilmannigfaltigkeiten bezeichnet, und $C \subset C_1$ sei eine kompakte Teilmenge mit der folgenden Eigenschaft: ist A_n die Komponente von $M - C_n$, die durch das Ende von M bestimmt ist und ist F eine Komponente von $\text{fr}(A_n)$, so induziert die Inklusion $F \rightarrow M - C$ einen Monomorphismus $\pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M - C)$.

Die Existenz von $\{C_n\}$ und C ist äquivalent zu der Bedingung, daß M fast-endirreduzibel ist.

3.2 DEFINITION

Sei M eine fast-endirreduzible 3-Mannigfaltigkeit und $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ eine eigentliche Einbettung. Die Abbildung f , oder auch die Ebene $f(\mathbb{R}^2)$, heißt wesentlich, wenn es eine Scheibe $D \subset \mathbb{R}^2$ gibt, so daß $f^{-1}(C) \subset D$ und für jede wesentliche, d.h. nicht-nullhomotope, Kurve λ in $\mathbb{R}^2 - D$ das Bild $f(\lambda)$ wesentlich in $M - C$ ist.

3.3 SATZ

M sei irreduzibel und fast-endirreduzibel und $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ eine eigentliche Einbettung. $\{C_n\}$ sei eine ausschöpfende Sequenz, $C \subset C_1$ kompakt und $\text{fr}(C_n)$ inkompressibel in $\text{cl}(M-C)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f eigentlich isotop zu einer Einbettung f' , für die ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Sequenz von Scheiben $\{D_n\}_{n \geq k}$ in $\mathbb{R}^2$ existiert mit

- (i) $D_n \subset D_{n+1}$ für $n = k, k+1, \dots$
- (ii) D_n ist eine Komponente von $f'^{-1}(C_n)$
- (iii) $f'^{-1}(C) \subset D_k$
- (iv) $f'(\partial D_n)$ ist für alle $n \geq k$ eine wesentliche Kurve in $M-C$ falls f wesentlich war.

BEWEIS

Wir können annehmen, daß f in allgemeiner Lage zu $\text{fr}(C_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Die Komponenten von $f^{-1}(C)$ sind dann kompakte Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^2$ (Scheiben mit Löchern).

Ist f wesentlich, gibt es ein k , so daß $f^{-1}(C_k)$ eine Komponente D_k enthält mit $f^{-1}(C) \subset D_k$, und $f(\lambda)$ ist wesentlich in $M-C$ für jede wesentliche Kurve λ in $\mathbb{R}^2 - D_k$. Für $n > k$ bezeichne D_n die Komponente von $f^{-1}(C_n)$, die D_{n-1} enthält.

Ist f nicht wesentlich, sei k der erste Index, für den $f^{-1}(C_k) \neq \emptyset$.

In diesem Fall wähle eine Komponente D_k von $f^{-1}(C_k)$ aus, und für $n > k$ sei, wie oben, D_n die Komponente von $f^{-1}(C_n)$, die D_{n-1} enthält.

In jedem Falle betrachte D_k . Genau eine Randkomponente von D_k , der äußere Rand, berandet eine Scheibe in $\mathbb{R}^2$, die D_k enthält. Jede innere

Randkomponente von D_k berandet eine Scheibe D in $\mathbb{R}^2$ mit $f(D) \subset M-C$. Da $f(\partial D) \subset \text{fr}(C_k)$ und $\text{fr}(C_k)$ inkompressibel in $\text{cl}(M-C)$ ist, gibt es eine Scheibe D' in $\text{fr}(C_k)$, die von $f(\partial D)$ berandet wird. D' wird von $f(\mathbb{R}^2)$ nur endlich oft in einfach geschlossenen Kurven getroffen. Die innerste Kurve berandet in D und in D' disjunkte Scheiben, die sich zu einer 2-Sphäre zusammensetzen. Da M irreduzibel ist, berandet diese Sphäre einen Ball, durch den sich mit einer Isotopie von f die innerste Schnittkurve beseitigen läßt. So fahre man fort. Damit ist f isotop zu einer Einbettung f_k , die außerhalb von D_k mit f übereinstimmt, und für die $f_k(D) \subset C_k$ ist.

Wir nehmen jetzt an, daß D_{n-1} eine Scheibe ist. Ist D_n keine Scheibe, kann man eine innere Randkomponente von D_n finden, die eine Scheibe D in $\mathbb{R}^2$ berandet und $f_{n-1}(D) \subset M-C$. Da $\text{fr}(C_n)$ inkompressibel und M irreduzibel ist, ist, wie oben, f_{n-1} isotop zu einer Abbildung f_n , die außerhalb von D_n mit f_{n-1} übereinstimmt und für die $f_n(D) \subset C_n$. Die Behauptung folgt jetzt durch Induktion, und die schrittweise konstruierte Einbettung werde mit f' bezeichnet. f ist eigentlich isotop zu f' , da nach Konstruktion f' für jedes C_n durch eine endliche Anzahl "lokaler" Isotopien aus f hervorgeht.

□

BEMERKUNG

Der Satz 3.3 ist ein Beispiel dafür, wie wir mit Enden arbeiten wollen: mit Hilfe der ausschöpfenden Sequenz werden Abbildungen schrittweise abgewandelt. So wird auch in [B-B-F] vorgegangen.

Wir wollen jetzt zeigen, daß zerlegende, aber nicht-wesentliche Ebenen genau die sind, die Halbräume abspalten.

3.4 SATZ

M sei fast-endirreduzibel, irreduzibel und offen. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ sei eine eigentliche, aber nicht-wesentliche Einbettung, so daß $f(\mathbb{R}^2)$ M in zwei Mannigfaltigkeiten M' und M'' zerlegt. Dann ist M' oder M'' eine triviale Zelle.

BEWEIS

Es sei $\{C_n\}$ eine ausschöpfende Sequenz von M gemäß Bezeichnung 3.1.

Nach Satz 3.3 kann man annehmen, daß es im $\mathbb{R}^2$ eine Sequenz von Scheiben $D_k \subset D_{k+1} \subset \dots$ gibt, mit $\bigcup D_j = \mathbb{R}^2$, D_j ist eine Komponenten von $f^{-1}(C_j)$ und $f(\partial D_j) \subset \text{fr}(C_j)$ ist eine unwesentliche Kurve in $M - C$ für alle $j \geq k$. Da $\text{fr}(C_j)$ inkompressibel in $\text{cl}(M - C)$ ist, berandet $f(\partial D_j)$ eine Scheibe $D_j^!$ in $\text{fr}(C_j)$ für alle $j \geq k$.

Es sei E irgendeine andere Komponente von $f^{-1}(C_j)$. Dann ist E eine Scheibe mit Löchern und der äußere Rand von E berandet eine Scheibe $D_j^!$ in $\mathbb{R}^2$. Falls $D_j^!$ das D_j nicht trifft, gibt es nach den üblichen Argumenten eine Abbildung f' , eigentlich isotop zu f , die außerhalb von E mit f übereinstimmt und für die $f'(E) \cap C_j = \emptyset$ ist. - Jetzt enthalten $D_j^!$ das D_j . Wie im Beweis zu Satz 3.3 kann man erreichen, daß ganz $D_j^!$ eine Komponente von $f^{-1}(C_j)$ ist.

Im ersten Fall bezeichne man die Abbildung f' wieder mit f , und im zweiten Fall tausche man in der Scheibensequenz $D_k \subset D_{k+1} \subset \dots$ das D_j gegen $D_j^!$ aus und bezeichne die neue Sequenz wieder mit $D_k \subset D_{k+1} \subset \dots$. Diesen Prozeß führe man nacheinander mit C_k, C_{k+1} , usw. durch. Da f eigentlich ist, also $f^{-1}(C_j)$ nur endlich viele Komponenten für jedes j hat, kann man jetzt annehmen, daß $f^{-1}(C_j)$ genau eine Scheibe D_j für alle $j \geq k$ ist.

Für alle $n \geq k$ bezeichne $\tilde{D}_n$ die Scheibe in $\text{fr}(C_n)$, die von $\partial(f(D_n))$ berandet wird. $f(D_k) \cup \tilde{D}_k$ ist eine Sphäre in C_k , die einen 3-Ball B_k in C_k berandet (sonst wäre M kompakt). $\text{cl}(D_{k+1} - D_k)$ ist ein Kreisring A_{k+1} . Daher ist $(\tilde{D}_k \cup f(A_{k+1}) \cup \tilde{D}_{k+1})$ eine Sphäre, die einen 3-Ball B_{k+1} in $\text{cl}(C_{k+1} - C_k)$ berandet. Analog ist, für $j > k+1$, $\text{cl}(D_{j+1} - D_j)$ ein Kreisring A_{j+1} mit $(\tilde{D}_j \cup f(A_{j+1}) \cup \tilde{D}_{j+1})$ ist eine Sphäre, die einen 3-Ball B_{j+1} in $\text{cl}(C_{j+1} - C_j)$ berandet.

Die Abbildung $g: \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \rightarrow M$ bilde $\{r \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \mid |r| \leq n+1\}$ homöomorph auf B_{n+1} für $n \geq k$ und $\{r \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \mid |r| \leq k\}$ auf B_k ab. g ist eine eigentliche Einbettung und $g(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = f(\mathbb{R}^2)$. Also berandet $f(\mathbb{R}^2)$ einen Halbraum in M . Damit folgt, daß M' oder M'' homöomorph zu $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$ (triviale Zelle mit einer Randebene) ist.

□

3.5 SATZ

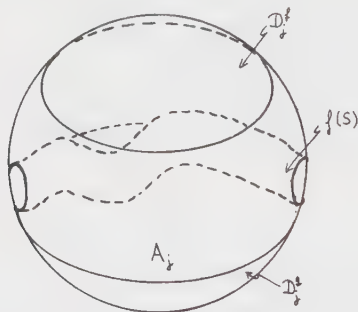
M sei fast-endirreduzibel und irreduzibel. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ und $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ seien zwei disjunkte, eigentliche und wesentliche Einbettungen des $\mathbb{R}^2$, so daß $f(\mathbb{R}^2)$ und $g(\mathbb{R}^2)$ M zerlegen. Sind $D_k^f \subset D_{k+1}^f \subset \dots$ und $D_1^g \subset D_{1+1}^g \subset \dots$ wie in Satz 3.3 und gilt für eine unendliche Teilmenge $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, daß $f(\partial D_j^f)$ in $\text{fr}(C_j)$ parallel ist zu $g(\partial D_j^g)$ für alle $j \in \mathbb{N}'$, so beranden $f(\mathbb{R}^2)$ und $g(\mathbb{R}^2)$ zusammen eine triviale Zelle T , das heißt, f und g sind parallel.

BEWEIS

Es sei k der erste Index, für den $g(\partial D_k^g)$ in $\text{fr}(C_k)$ parallel zu $f(\partial D_k^f)$ ist. Der Kreisring, der von $f(\partial D_j^f)$ und $g(\partial D_j^g)$ in $\text{fr}(C_j)$ für alle $j \in \mathbb{N}'$, $j \geq k$ berandet wird, werde mit A_j bezeichnet. Dann ist

$(g(D_j^g) \cup f(D_j^f) \cup A_j)$ eine 2-Sphäre, die einen 3-Ball B_j in C_j berandet (C_j ist nach der Vereinbarung in 3.1 die j -te Mannigfaltigkeit der ausschöpfenden Sequenz). So erhält man eine Sequenz $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}'}$, $j \geq k$ von 3-Bällen in M .

Man kann annehmen, daß $g(\mathbb{R}^2) \cap B_j = g(D_j^g)$ und $f(\mathbb{R}^2) \cap B_j = f(D_j^f)$. Ist z.B. $S \neq D_j^f$ eine Komponente von $f^{-1}(B_j)$, so ist S eine Scheibe mit Löchern und $\partial(f(S)) \subset A_j$. Nach den üblichen Argumenten gibt es eine zu f isotope Abbildung f' , mit $f'(S) \cap B_j = \emptyset$ und $f'^{-1}(B_j) = D_j^f$.



Für eine unendliche Teilmenge $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$ ist $B_n \subset B_m$, wenn $n < m$ und $n, m \in \mathbb{N}''$. Das sieht man so: für alle $j \in \mathbb{N}'$, $j \geq k$, ist ∂B_j eine Sphäre S_j , die M in zwei Mannigfaltigkeiten B_j und C_j zerlegt. Da für $i > j$ $S_i \cap S_j$ aus den beiden disjunkten Scheiben $g(D_j^g)$ und $f(D_j^f)$ besteht, ist entweder $B_j \subset B_i$ und $C_i \subset C_j$ oder aber $B_j \subset C_i$ und $B_i \subset C_j$. Insgesamt ergeben sich zwei Sequenzen von Teilmannigfaltigkeiten $N_k \subset N_{k+1} \subset \dots$ und $N'_k \subset N'_{k+1} \subset \dots$ von denen mindestens eine unendlich viele der B_j enthalten muß.

Wir bilden $\{j \in \mathbb{N}'', j \geq k\}$ auf $\{k, k+1, \dots\}$ unter Beibehaltung der Ordnung ab. Seien B_j und B_{j+1} zwei aufeinanderfolgende Elemente der Sequenz $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}'', n \geq k}$. Dann ist $\text{cl}(B_{j+1} - B_j)$ ein Volltorus T_{j+1} .

Definiere $h: \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow M$ durch die Abbildung, die $\{(t,x) | j \leq |t| \leq j+1, x \in I\}$ homöomorph auf T_{j+1} für alle $j > k$ abbildet, und die $\{(t,x) | |t| \leq k, x \in I\}$ auf B_k abbildet. h ist eine eigentliche Einbettung, und $h(\mathbb{R}^2 \times I)$ ist eine triviale Zelle, die von $f(\mathbb{R}^2)$ und $g(\mathbb{R}^2)$ berandet wird.

□

4 HILFSSÄTZE

Wir wollen in diesem Abschnitt eine Reihe von Hilfssätzen für den Beweis des Zerlegungssatzes aufzählen und beweisen. Die Formulierung der Lemmata ist an dieser Stelle nicht leicht verständlich, erklärt sich aber aus dem Beweiskonzept im nächsten Abschnitt. Ein großer Teil der Hilfssätze ist eine Verallgemeinerung der Lemmata, die J. Gross zur Vorbereitung seines Zerlegungstheorems in [G] bewiesen hat, und deren Formulierungen und Beweise sich verallgemeinern ließen.

4.1 HILFSSATZ

T sei die Vereinigung einer abzählbaren Familie verallgemeinerter Henkelkörper $\{T_j\}_{j \in J}$, so daß der Durchschnitt jedes T_j mit der Vereinigung aller anderen verallgemeinerten Henkelkörper T_i eine abzählbare Vereinigung disjunkter Sterne in $\partial(T_j)$ ist. Ist T orientierbar, zusammenhängend und lokalendlich, so ist auch T ein verallgemeinerter Henkelkörper.

BEWEIS

Das folgt aus der Definition.

□

4.2 HILFSSATZ

M sei eine 3-Mannigfaltigkeit und S ein Stern in ∂M . Dann gibt es eine triviale Zelle K in M , die in einer beliebig kleinen Umgebung von S liegt und für die $K \cap \partial M = S$ und $M \approx \text{cl}(M - K)$ ist.

BEWEIS

Wähle K als als reguläre Umgebung von S .

□

4.3 HILFSSATZ

Y sei die Vereinigung einer abzählbaren Menge disjunkter 3-Mannigfaltigkeiten und T die Vereinigung einer abzählbaren Familie disjunkter verallgemeinerter Henkelkörper, so daß sich Y und T nur in ihren Rändern schneiden und der Schnitt von ∂T mit jeder Komponente von ∂Y die Vereinigung einer abzählbaren, nichtleeren Familie disjunkter Sterne ist. $Y \cup T$ sei orientierbar und zusammenhängend. Dann enthält Y eine Familie trivialer Zellen, deren Vereinigung mit K bezeichnet wird, so daß für $Y' = \text{cl}(Y - K)$ und $T' = T \cup K$ die folgenden Bedingungen gelten:

- (i) $Y' \approx Y$
- (ii) T' ist die Vereinigung einer abzählbaren Familie disjunkter verallgemeinerter Henkelkörper,
- (iii) Y' und T' schneiden sich nur in ihren Rändern,
- (iv) der Schnitt von $\partial T'$ mit jeder Komponente von $\partial Y'$ ist genau ein Stern.

BEWEIS

Es sei R_j eine Komponente von ∂Y . Der Durchschnitt von T mit R_j besteht aus abzählbar vielen disjunkten Sternen. Verbindet man all diese Sterne sukzessiv durch disjunkte, eingebettete Bögen in R_j , wobei bei jedem Schritt nur ein neuer Stern angebunden werden darf (es sollen keine einfach geschlossenen Kurven entstehen), und vereinigt man

dann die Sterne mit disjunkten regulären Umgebungen dieser Bögen, bekommt man einen Stern S_j in R_j , der $\partial T \cap R_j$ enthält. K_j sei eine triviale Zelle in Y mit $K_j \cap R_j = S_j$ (Hilfssatz 4.2). Für alle Komponenten $\{R_j\}_{j \in J}$ seien die, wie oben konstruierten, trivialen Zellen $\{K_j\}_{j \in J}$ disjunkt gewählt. K sei nun die Vereinigung aller K_j , $j \in J$. Wegen der Hilfssätze 4.1 und 4.2 sind die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Die Bedingungen (iii) und (iv) folgen aus der Konstruktion.

□

4.4 HILFSSATZ

Es seien Y und Y' zwei homöomorphe 3-Mannigfaltigkeiten mit nichtleerem Rand. C und C' seien triviale Zellen mit $C \cap Y = \partial C \cap \partial Y$ und $C' \cap Y' = \partial C' \cap \partial Y'$. Außerdem schneide ∂C jede Komponente von ∂Y und $\partial C'$ jede Komponente von $\partial Y'$ in genau einem Stern. Sind $Y \cup C$ und $Y' \cup C'$ beide orientierbar, so ist $Y \cup C \approx_f Y' \cup C'$.

□

4.5 HILFSSATZ

Es sei P eine $\ast$ -prime 3-Mannigfaltigkeit, deren Rand aus einer Ebene besteht. $\{S_i\}_{i \in I}$ sei eine abzählbare Familie disjunkter Sterne, von denen jeder eigentlich in P eingebettet ist. T sei die Vereinigung der Abschlüsse aller Komponenten von $P - \cup S_i$, die triviale Zellen sind, und $Y := \text{cl}(P - T)$ sei nicht leer. Dann existiert eine triviale Zelle C , mit zusammenhängendem Rand, und eine zu Y homöomorphe Teilmannigfaltigkeit Y' in P , so daß sich C und Y' nur in ihren Rändern treffen, ∂C jede Komponente von $\partial Y'$ in einem Stern trifft, $C \cup Y'$ orientierbar ist und $Y' \cup C \approx P$.

BEWEIS

Jede Komponente von T ist ein verallgemeinerter Henkelkörper (Hilfssatz 4.1). Wendet man Hilfssatz 4.3 auf Y und T an, erhält man K , Y' und T' , die den Bedingungen (i) - (iv) von 4.3 genügen. T' ist zusammenhängend mit zusammenhängendem Rand. Das sieht man so: seien S und S' zwei verschiedene Randkomponenten von T' . Wegen (iv) von Hilfssatz 4.3 gibt es zwei verschiedene Randkomponenten D und D' von Y' , so daß $S \cap D$ und $S' \cap D'$ Sterne sind. Da $\partial P = \partial(T' \cup Y')$ zusammenhängend ist, muß aber $S = S'$ sein. Also ist T' ein einziger zusammenhängender, verallgemeinerter Henkelkörper mit zusammenhängendem Rand.

Jetzt sei S ein Stern in $\partial T'$, der $T' \cap Y'$ enthält. Wegen Hilfssatz 4.2 existiert eine triviale Zelle B in T' mit $B \cap \partial T' = S$. Da Y nicht leer war, ist $Y' \cup B$ eine nichttriviale 3-Mannigfaltigkeit. Nun gilt $P \approx (Y' \cup B) * \text{cl}(T' - B)$ und $T' \approx \text{cl}(T' - B)$. Also ist P als $*$ -prime Mannigfaltigkeit Sternsumme des nichttrivialen Teiles $(Y' \cup B)$ und des Teiles T' , der damit eine triviale Zelle sein muß. Wegen $Y' \approx Y$ (Hilfssatz 4.3, (i)) folgt die Behauptung.

□

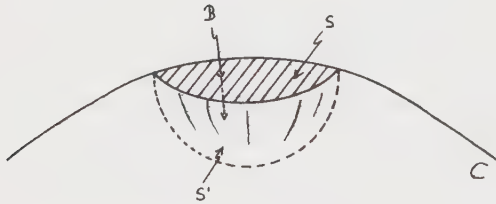
4.6 HILFSSATZ

Es sei P eine $*$ -prime 3-Mannigfaltigkeit und ∂P eine Ebene. $\{S_i\}_{i \in I}$ sei eine abzählbare Familie disjunkter, eigentlich in P eingebetteter Sterne. Dann sind die Abschlüsse in P aller Komponenten von $P - \bigcup S_i$ bis auf höchstens eine Ausnahme triviale Zellen.

BEWEIS

Sei Y die Vereinigung der Abschlüsse aller Komponenten, die keine trivialen Zellen sind. Wegen Hilfssatz 4.5 existiert eine triviale Zelle C mit zusammenhängendem Rand, so daß sich C und Y nur in ihren Rändern schneiden, ∂C jede Komponente von ∂Y in genau einem Stern trifft, $Y \cup C$ orientierbar ist und $Y \cup C \approx P$ (wir unterscheiden nicht zwischen Y und Y').

Angenommen, Y ist nicht zusammenhängend. Dann sei S ein Stern in ∂C , der alle Komponenten des Schnittes von ∂C mit einer Komponente von Y enthält. Nach Hilfssatz 4.2 gibt es eine triviale Zelle B in C mit $B \cap \partial C = S$.



Der Stern $S' := B \cap \text{cl}(C - B)$ ist parallel zu S und zerlegt $Y \cup C$ in zwei nichttriviale Summanden, was der Annahme widerspricht, daß P $\ast$ -prim ist. Also kann der Fall, daß Y nicht zusammenhängend ist, nicht auftreten.

Jetzt sei Y_1 der Abschluß einer Komponente von $P - \cup S_i$, die keine triviale Zelle ist. Falls $Y \neq Y_1$, ist $Y_1 \cap \text{cl}(Y - Y_1)$ die Vereinigung einer Teilmenge der Sterne $\{S_i\}_{i \in I}$. Die Teilmenge sei $\{S_j\}_{j \in J}$. Für $j \in J$ sei $S_j^!$ ein eigentlich in Y_1 eingebetteter Stern, so daß die $\{S_j^!\}_{j \in J}$ disjunkt sind, jedes $S_j^!$ das Y_1 zerlegt, wobei eine Komponente

eine triviale Zelle B_j ist, die S_j im Rand enthält. Die $\{B_j\}_{j \in J}$ seien disjunkt. Die Sterne $\{S_i\}_{i \in I} \cup \{S_j^!\}_{j \in J}$ sind disjunkt und eigentlich in P eingebettet. Die Vereinigung Y' der Abschlüsse aller Komponenten von $P - \{\cup_{i \in I} S_i \cup \cup_{j \in J} S_j^!\}$, die keine trivialen Zellen sind, ist nicht zusammenhängend, denn eine der Komponenten ist

$cl(Y_1 - \cup_{j \in J} B_j)$ und die Vereinigung der restlichen Komponenten ist $cl(Y - Y_1)$. Das widerspricht wie oben der Annahme, daß P $\ast$ -prim ist.

Folglich ist $Y = Y_1$.

□

5 DER ZERLEGUNGSSATZ

In diesem Abschnitt wollen wir den Zerlegungssatz zuerst beweisen und dann zum Schluß formulieren.

Wenn wir uns eine beliebige, offene 3-Mannigfaltigkeit M vorgeben, kann es sein, daß sich M aus unendlich vielen Primstücken längs Ebenen zusammensetzt. Das ist zum Beispiel bei einem verallgemeinerten Henkelkörper mit unendlich vielen Henkeln der Fall. Unser Beweis der Eindeutigkeit einer Primfaktorzerlegung, der zum Teil auf einer sukzessiven Beseitigung von Schnittkurven beruht, kann natürlich bei solchen Mannigfaltigkeiten nicht funktionieren. Daher müssen wir uns auf Mannigfaltigkeiten mit einer oberen Grenze $z \in \mathbb{N}$ für die Mächtigkeit jeder maximalen Familie nichtparalleler, wesentlicher, eigentlich eingebetteter Ebenen beschränken.

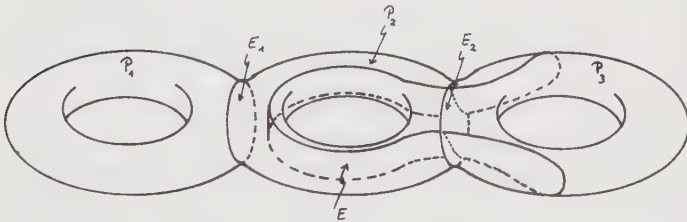
Daß es nur sinnvoll ist, wesentliche Schnittebenen zu betrachten, folgt aus dem Satz 3.4, der aussagt, daß jede unwesentliche, zerlegende Ebene einen Halbraum, also eine triviale Zelle, abspaltet. Sind E und E' zwei zerlegende Ebenen, die im Sinne von 3.5 parallel sind, so liegt zwischen ihnen eine triviale Zelle. Damit reicht es entweder nur an E oder nur an E' aufzuschneiden, da sich die entstehenden Mannigfaltigkeiten in beiden Fällen nur um eine triviale Zelle unterscheiden.

Im Folgenden sei M irreduzibel, fast-endirreduzibel, offen und habe ein Ende. $E_1, \dots, E_{n-1}$, $n-1 \leq z$, sei eine maximale Menge disjunkter, zerlegender, eigentlich eingebetteter Ebenen, die wesentlich und nichtparallel sind, das heißt, von denen nicht zwei $E_i \neq E_j$ eine Sequenz von Scheiben $D_i^k \subset D_i^{k+1} \subset \dots$ und $D_j^1 \subset D_j^{1+1} \subset \dots$, haben, so daß

$\cup_s D_i^{k+s} = E_i$, $\cup_s D_j^{l+s} = E_j$ und ∂D_i^p parallel zu ∂D_j^p in $\text{fr}(C_p)$ ist für unendlich viele p .

- Mit $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen wir wieder eine ausschöpfende Sequenz von M . - M ist dann homöomorph zu einer Sternsumme $M \approx P_1 * \dots * P_n$, wobei die $P_1, \dots, P_n$ $*$ -prim sind und die Sterne die eigentlich eingebetteten, wesentlichen Ebenen $E_1, \dots, E_{n-1}$ sind.

Wir wollen jetzt die Eindeutigkeit der Zerlegung von M in $P_1 * \dots * P_n$ beweisen. Dazu sei E eine beliebige, eigentlich in M eingebettete Ebene, die M in zwei Komponenten M_1 und M_2 zerlegt, von denen keine eine triviale Zelle ist. Es genügt zu zeigen, daß man die P_i 's so umnummern kann, daß für ein r mit $1 \leq r \leq n$ gilt: $M_1 \approx_f P_1 * \dots * P_r$ und $M_2 \approx_f P_{r+1} * \dots * P_n$.



E sei in allgemeiner Lage zu den $E_1, \dots, E_{n-1}$. Dann sind die Komponenten von $E \cap (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1})$ von zwei Typen:

- (a) einfach geschlossene Kurven
- (b) offene, einfache Bögen ($\approx \mathbb{R}^1$).

Der Eindeutigkeitsbeweis ist in drei Schritte aufgeteilt.

1. Schritt: $E \cap (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1})$ ist leer,
2. Schritt: $E \cap (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1})$ enthält einfach geschlossene Kurven,
3. Schritt: $E \cap (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1})$ besteht aus Bögen.

1. SCHRITT

Es sei $E \cap (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1})$ leer. Dann liegt die Ebene E in einem P_j , und $P_j - E$ hat zwei Komponenten, denn sonst hätte $M - E$ auch nur eine Komponente. Da P_j prim ist, ist eine der beiden Komponenten X von $P_j - E$ eine triviale Zelle und die andere somit fast homöomorph zu P_j . Damit ist nach eventueller Umnummerierung der $P_1, \dots, P_n$ das

$$M_1 \approx_f P_1 * \dots * P_j \text{ und } M_2 \approx_f P_{j+1} * \dots * P_n.$$

□

2. SCHRITT

$E \cap (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1})$ enthalte einfach geschlossene Kurven.

VORBEMERKUNG

Einfach geschlossene Schnittkurven können auf zwei verschiedene Weisen auftreten: einmal als unendliches System von konzentrischen Schnittkurven auf E und einmal vereinzelt, das heißt, immer nur endlich viele konzentrische. Am einfachsten lassen sich vereinzelte Schnittkurven beseitigen (Hilfssatz 5.1). Tritt ein unendliches System konzentrischer Schnittkurven auf, können wir zeigen, daß es dann keine Schnittbögen geben kann und wir es mit genau einem System von konzentrischen Schnittkurven zu tun haben (Hilfssatz 5.2). Der Hilfssatz 5.3 untersucht die Lage dieser Kurven auf den anderen Ebenen $E_1, \dots, E_{n-1}$ und ermöglicht es, das Schnittkurvensystem zu entfernen.

Es seien $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ für $i = 1, \dots, n-1$ und $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ eigentliche Einbettungen mit $f_i(\mathbb{R}^2) = E_i$ und $f(\mathbb{R}^2) = E$.

5.1 HILFSSATZ

Die Einbettung f ist eigentlich isotop zu einer Einbettung f' , so daß $(f')^{-1}(E \cap (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1}))$ nur aus Bögen und Systemen von unendlich vielen konzentrischen Kurven besteht. Vereinzelte Schnittkurven lassen sich also durch eine eigentliche Isotopie von f beseitigen.

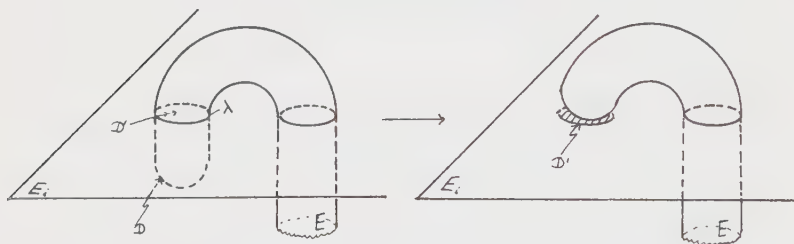
BEWEIS

$f^{-1}(E \cap (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1}))$ besteht aus Bögen, Systemen von unendlich vielen konzentrischen Kurven und vereinzelter Kurven. Wir haben hier zu zeigen, daß sich die vereinzelter Kurven beseitigen lassen.

Nach Voraussetzung ist M fast-endirreduzibel. Sei also $C \subset M$ kompakt und $\{C_n\}$ eine ausschöpfende Sequenz von M , so daß ∂C_n inkompressibel in $cl(M - C)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Nach Satz 3.3 zerfallen alle Ebenen bezüglich der C_n in Scheiben. Das heißt, man kann annehmen, daß es Scheiben $D_{k_i}^i \subset D_{k_i+1}^i \subset \dots$ gibt, wobei $f_i^{-1}(C) \subset D_{k_i}^i$, $D_{k_i+j}^i$ eine Komponente von $f_i^{-1}(C_{k_i+j})$ ist und $\bigcup_{m=k_i}^{\infty} D_m^i = \mathbb{R}^2$ ist für alle $i = 1, \dots, n-1$ und $j \in \mathbb{N}$. Ebenso gibt es Scheiben $D_k \subset D_{k+1} \subset \dots$, wobei $f^{-1}(C) \subset D_k$ und D_{k+j} eine Komponente von $f^{-1}(C_{k+j})$ ist für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{m=k}^{\infty} D_m = \mathbb{R}^2$.

Sei $m \geq \max \{k_1, \dots, k_{n-1}, k\}$ der erste Index, so daß für ein $i \in \{1, \dots, n-1\}$ $f(D_m) \cap f_i(D_m^i)$ einfach geschlossene Kurven enthält, die nicht zu einem unendlichen System gehören. λ sei die innerste Schnittkurve von $f(D_m) \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} f_i(D_m^i)$ auf $f(D_m)$. Dann berandet λ eine Teilscheibe D' von $f_i(D_m^i)$ für ein i und eine Teilscheibe D von $f(D_m)$.

Da C_m irreduzibel ist, berandet $D' \cup D$ einen 3-Ball B . Schiebt man D durch B auf die andere Seite von D' , ergibt das eine Isotopie von f , die λ entfernt. Nun wiederhole man dasselbe bei der Kurve, die jetzt zur innersten geworden ist. Nach einer endlichen Anzahl solcher Operationen kann man annehmen, daß $f(D_m) \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} f_i(D_m^i)$ keine vereinzelt Kurven mehr enthält.

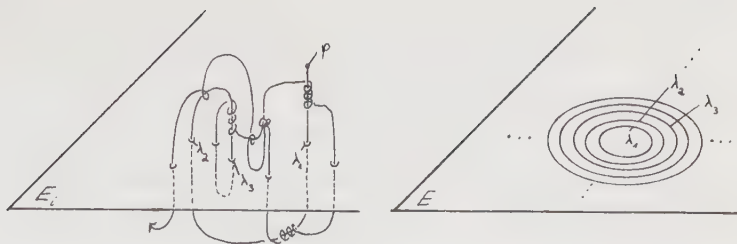


Danach führe man diesen Prozeß mit C_{m+1} durch und so fort. Alle Prozesse zusammen ergeben eine eigentliche Isotopie.

□

BEMERKUNG

Ein System von unendlich vielen konzentrischen Schnittkurven auf E kann man sich folgendermaßen vorstellen: man denke sich die Ebene E um einen Punkt p herum zusammengeschnürt und dann unendlich oft durch ein E_1 gefädelt.



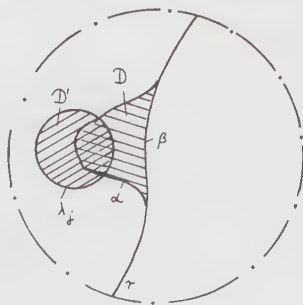
An diesem Beispiel kann man auch sehen, warum unendliche Systeme gesondert betrachtet werden müssen. Der Methode von Hilfssatz 5.1 entspräche nämlich hier ein Zurückziehen von E längs des Fadenverlaufes. In diesem Fall würde aber der Punkt p einen unendlichen Weg zurücklegen, was keine eigentliche Isotopie mehr ergäbe.

5.2 HILFSSATZ

Enthält $E \cap (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1})$ eine unendliche Folge konzentrischer Schnittkurven, so gibt es keine Schnittbögen. Es kann höchstens eine unendliche Folge konzentrischer Schnittkurven auf E geben.

BEWEIS

Sei r ein unendlicher Bogen und $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine unendliche Folge von konzentrischen Kurven in $f^{-1}(E_1 \cup \dots \cup E_{n-1})$. Der Bogen r zerlegt den $\mathbb{R}^2$ in zwei Halbebenen. Die Halbebene, die $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ enthält, wollen wir mit H bezeichnen. Sei α ein eigentlich in H eingebetteter Bogen, der ein λ_j schneidet. Zusammen mit einem Teilbogen β von r berandet α eine Scheibe D in H .



Sei D' die Scheibe, die von λ_j berandet wird. Dann treffen unendlich viele der $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ entweder D oder D' . Damit ist aber für ein $k \in \{1, \dots, n-1\}$ $f_k^{-1}(f(D))$ oder $f_k^{-1}(f(D'))$ nicht kompakt, was der Voraussetzung widerspricht, daß die Ebene E_k eigentlich eingebettet ist. Jetzt seien $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ und $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ zwei verschiedene unendliche Systeme von konzentrischen Schnittkurven. Wir nehmen zwei beliebige Kurven λ_n und γ_m heraus. λ_n berandet eine Scheibe D und γ_m berandet eine Scheibe D' in $\mathbb{R}^2$. Sei β ein Bogen in $\text{cl}(\mathbb{R}^2 - (D \cup D'))$, der einen Randpunkt auf λ_n und einen auf γ_m hat. Dann treffen entweder unendlich viele Kurven D , D' oder β , oder aber $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}} \cup \{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ist ein System von konzentrischen Kurven. Der zweite Fall widerspricht der Annahme, daß die Systeme verschieden sind, und aus dem ersten Fall läßt sich, wie oben, schließen, daß eine der Ebenen $E_1, \dots, E_{n-1}$ nicht eigentlich eingebettet ist.

□

5.3 HILFSSATZ

Ist $f^{-1}(E_1 \cup \dots \cup E_{n-1})$ ein unendliches System konzentrischer, einfach geschlossener Kurven, so ist $f_i^{-1}(E)$, falls nicht leer, ein System konzentrischer, einfach geschlossener Kurven für $i = 1, \dots, n-1$.

BEWEIS

Sei $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ das Kurvensystem in $\mathbb{R}^2$. Die $\{f(\lambda_j), j \in \mathbb{N}\}$ sind wesentliche Kurven in $M-C$ (C ist die kompakte Menge, für die $M-C$ endirreduzibel ist). Das sieht man so: $f^{-1}(C)$ ist kompakt, und daher gibt es eine Scheibe $D \subset \mathbb{R}^2$, mit $f^{-1}(C) \subset D$. Es sei D_j die Scheibe in $\mathbb{R}^2$, die von λ_j , $j \in \mathbb{N}$, berandet wird. $\{D_j, j \in \mathbb{N}\}$ ist ein ausschöpfendes Sy-

stem von Scheiben in $\mathbb{R}^2$. Daher gibt es einen Index $k \in \mathbb{N}$, mit $D \subset D_k$.

Jetzt folgt die Behauptung, da f wesentlich ist (Definition 3.2).

Für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ muß dann auch $f_i^{-1}(f(\lambda_j))$ für alle $j \in \mathbb{N}$, für die das nicht leer ist, eine wesentliche Kurve in $\mathbb{R}^2 - f_i^{-1}(C)$ sein

($f_1, \dots, f_{n-1}$ sind wesentliche Abbildungen). Das ist nur möglich, wenn $f_i^{-1}(\{f(\lambda_j) | j \in \mathbb{N}\})$ ein System wesentlicher konzentrischer Kurven ist.

□

SCHLUSS VON SCHRITT 2

Wir nehmen jetzt an, daß $f^{-1}(E \cap (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1}))$ aus genau einem System $\{\lambda_j | j \in \mathbb{N}\}$ konzentrischer Kurven besteht.

Die $\{f(\lambda_j) | j \in \mathbb{N}\}$ zerlegen E in eine Scheibe und ein unendliches System von Kreisringen. Nehmen wir an, daß gewisse dieser Kreisringe in P_1 liegen und genau eine Randkurve auf E_1 haben. Da alle Ebenen $E_1, \dots, E_{n-1}$ zerlegen, sich die Primstücke $P_1, \dots, P_n$ also nicht zu Henkeln zusammenschließen, können wir immer zwei dieser Kreisringe mit den dazwischenliegenden Ringen auf E zu Kreisringen $\{A_i\}_{i \in I}$ zusammenfassen, für die folgendes gilt:

- (i) $\partial A_i \subset E_1$
- (ii) A_i trifft P_1 genau mit den Teilkreisringen, die sich an die Randkurven von A_i anschließen.

Man kann erreichen, daß $A_i \subset P_1$ für alle $i \in I$. Das sieht man so: der Kreisring A_i liegt mit seinen beiden Randkurven auf E_1 . Die innere Randkurve berandet eine Scheibe D_1 und die äußere Randkurve eine Scheibe D_2 in E_1 . Wir ersetzen D_1 durch eine Scheibe $D'_1 \subset P_1$, die in einer regulären Umgebung von D_1 liegen soll. Dann ist $\{A_i \cup D'_1 \cup D_2\}$ eine ein-

Enthält $f^{-1}(P_1)$ eine Scheibe D mit $f(\partial D) \subset E_1$, sei $f(D) \cup B$ die Scheibe D^0 , wobei B der Kreisring in E_1 ist, der von $f(\partial D)$ und λ^0 berandet wird. Falls $f^{-1}(P_1)$ keine Scheibe enthält, sei D^0 die Scheibe in E_1 , die von λ^0 berandet wird. Der Kreisring in E_1 , der von $\lambda^{j'}$ und $\lambda^{j'+1}$ berandet wird, sei mit B^j für alle $j \in \mathbb{N}$ bezeichnet.

$(D^0 \cup [UA^j] \cup [UB^j])$ ist eine in P_1 eingebettete Ebene E'_1 . Da P_1 irreduzibel ist, berandet für alle $i \in \mathbb{N}$, die Scheibe, die von $\lambda^{i'}$ in E_1 berandet wird, zusammen mit der Scheibe $(D^0 \cup A^0 \cup B^1 \cup A^1 \cup \dots \cup B^i \cup A^i)$ einen 3-Ball in P_1 . Damit sind E_1 und E'_1 parallel (beranden eine triviale Zelle homöomorph zu $\mathbb{R}^2 \times I$), und es existiert eine eigentliche Isotopie von f , die E'_1 auf die andere Seite von E_1 bringt.

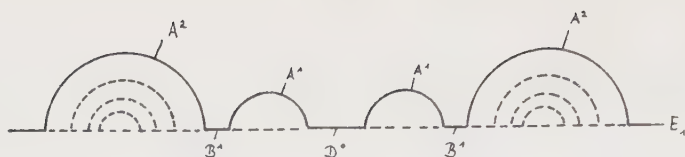
Hat man diesen Prozeß für P_1 mit E_1 , P_2 mit $E_2, \dots$, P_{n-1} mit E_{n-1} durchgeführt, liegt E entweder ganz in einem Primteil P_j , $j \in \{1, \dots, n\}$, oder E trifft ein Primstück P_j höchstens noch in einem Kreisring.

Im ersten Fall haben wir die Situation von Schritt 1 herbeigeführt, und im zweiten Fall besteht $f^{-1}(E_1 \cup \dots \cup E_{n-1})$ nur noch aus endlich vielen einfach geschlossenen Kurven, die wir mit Hilfe von Hilfssatz 5.1 beseitigen können.

□

BEMERKUNG

$\{A_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ ist ein konzentrisches System von Kreisringen in P_1 , die mit ihren Randkurven auf E_1 liegen. Von diesen Kreisringen können endlich viele ineinander verschachtelt sein, so daß man bei der Konstruktion der Ebene E'_1 darauf achten muß, daß man nur äußere Ringe nimmt. Die äußeren Ringe $\{A^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ werden mit den dazwischen liegenden Ringen $\{B^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ auf E_1 zu der Ebene E'_1 ergänzt.



3. SCHRITT

Wir nehmen jetzt an, daß M von $(n-1)$ Ebenen $E_1, \dots, E_{n-1}$ in Primstücke zerlegt wird und $E \cap (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1})$ aus unendlichen Bögen besteht. Wir schneiden von M all die Primstücke ab, die von E nicht getroffen werden und bezeichnen mit M' das Innere der Restmannigfaltigkeit. Nach eventueller Ummumerierung ist dann $M' \approx_f P_1 * \dots * P_m$, $m \leq n$. Die zerlegenden Ebenen seien mit $E_1, \dots, E_{m-1}$ bezeichnet (eine Teilmenge von $\{E_1, \dots, E_n\}$). Damit haben wir

5.4 AUSGANGSPUNKT A

Die Mannigfaltigkeit M' , die wir noch zu untersuchen haben, wird von $(m-1)$ Ebenen $E_1, \dots, E_{m-1}$ in Primstücke $P_1, \dots, P_m$ zerlegt, $E \subset M'$, $E \cap (E_1 \cup \dots \cup E_{m-1})$ besteht aus unendlichen Bögen und $E \cap E_i \neq \emptyset$ für $i = 1, \dots, m-1$.

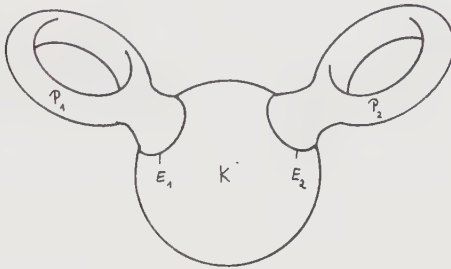
5.5 HILFSSATZ

M' ist homöomorph zu einer Mannigfaltigkeit M'' , die man folgendermaßen erhält: sei K eine triviale Zelle, deren Rand aus m disjunkten Ebenen $L_1, \dots, L_m$ besteht. Man verklebt K mit $P_1, \dots, P_m$ zu einer Mannigfaltigkeit $\tilde{M} \approx P_1 * \dots * P_m * K$, indem man die Ebene E_j in ∂P_j mit L_j für

$j = 1, \dots, m-1$ und eine Randebene von P_m mit L_m identifiziert. Setze $M'' := \text{int}(\tilde{M})$.

BEMERKUNG

Der Hilfssatz 5.5 besagt, daß man sich M' vorstellen kann, als triviale Zelle K , mit den Primteilen $P_1, \dots, P_m$ sternförmig darum angeordnet.



Diese Betrachtungsweise hat den Vorteil, daß für $j = 1, \dots, m$ die Komponenten von $E \cap P_j$ eigentlich eingebettete Sterne sind, die mit ihren Rändern ganz auf E_j liegen.

Zum Beweis von Hilfssatz 5.5 brauchen wir den Hilfssatz 5.6.

5.6 HILFSSATZ

P sei eine 3-Mannigfaltigkeit mit einem Ende, deren Rand aus k disjunkten Ebenen $D_1, \dots, D_k$ besteht. Dann ist P homöomorph zu einer Mannigfaltigkeit P' , in der sich jeder eigentlich in P eingebettete Stern zu einer Ebene fortsetzen läßt.

Ist S ein eigentlich in P eingebetteter Stern, und sind α und β Randbögen von S auf verschiedenen Randkomponenten von P , läßt sich S in P'

zu einem Streifen $S' (\approx \mathbb{R}^1 \times I)$ fortsetzen, wobei α und β die beiden Randkomponenten sind.

BEWEIS

Sei S ein eigentlich in P eingebetteter Stern und I das Einheitsintervall. P ist homöomorph zu $P_1 := P +_{D_1} (D_1 \times I) + \dots +_{D_k} (D_k \times I)$, wobei $+_{D_i} (D_i \times I)$ bedeutet, daß die tri-

viale Zelle $D_i \times I$ an D_i angeklebt

wird. Die Randecken von P_1 seien

mit $D'_1, \dots, D'_k$ bezeichnet. Für

$i = 1, \dots, k$ sei p_i ein Punkt in D_i ,

$p_i \notin S$ und U_i eine reguläre Umgebung

von $p_i \times I$ in P_1 . Dann ist

$P' := (\text{int } P_1 - \bigcup_{i=1}^k U_i)$ homöomorph zu P und

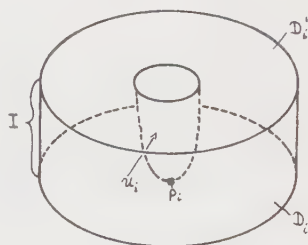
$\partial P' = [\partial U_1 - (U_1 \cap D'_1)] \cup \dots \cup [\partial U_k - (U_k \cap D'_k)]$ besteht aus k Ebenen.

Indem man S in P' durch die Halbebenen $\{s_j \times [0, 1] \mid j \in J\}$ verlängert,

wobei $\{s_j \mid j \in J\}$ die Randkomponenten von S seien, erhält man eine ei-

gentlich in P' eingebettete Ebene, die P' genau dann zerlegt, wenn S

die Mannigfaltigkeit P zerlegt.



Jetzt wollen wir S zu einem Streifen fortsetzen. Sei E_q die Randecke von P , in der α liegt, und E_p die Randecke von P , in der β liegt. Ersetze nun in der Konstruktion oben U_q durch eine reguläre Umgebung von $\alpha \times I$ und U_p durch eine reguläre Umgebung von $\beta \times I$.

□

5.7 FOLGERUNG

M sei eine irreduzible, fast-endirreduzible, offene 3-Mannigfaltigkeit mit einem Ende. Jede Menge disjunkter, eigentlich eingebetteter, wesentlicher und nicht-paralleler Ebenen in M sei endlich. Ist dann $P_1 + \dots + P_n$ eine Zerlegung von M in e-prime Faktoren, so ist jeder Faktor P_i auch *-prim.

BEWEIS

Angenommen P_i ist e-prim, aber nicht *-prim. Dann existiert ein eigentlich in P_i eingebetteter Stern S, der P_i in zwei nichttriviale Summanden zerlegt. Nach Hilfssatz 5.6 ist P_i homöomorph zu einer Mannigfaltigkeit $P_i^!$, in der eine eigentlich eingebettete Ebene existiert, die $P_i^!$ in zwei nichttriviale Summanden zerlegt. Dann war aber P_i nicht e-prim.

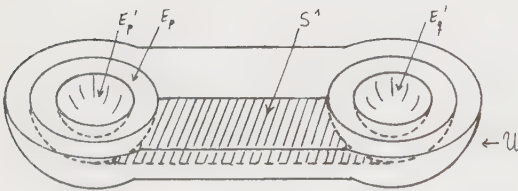
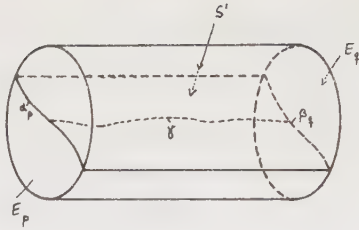
□

BEWEIS VON HILFSSATZ 5.5

Zuerst wollen wir alle Ebenen $E_1, \dots, E_{m-1}$ in den Primteil P_1 bringen.

Sei E_p eine der Ebenen, die den Primteil P_1 nicht trifft. Da $E \cap E_p \neq \emptyset$, existiert ein Stern S (Teilstern von E), der E_p in Bögen $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ und eine Randebene E_q von P_1 in Bögen $\{\beta_j\}_{j \in J}$ trifft und für den sonst $P_1 \cap S = \emptyset$ ist. Sei $\alpha_p \in \{\alpha_i\}_{i \in I}$ und $\beta_q \in \{\beta_j\}_{j \in J}$. Nach Hilfssatz 5.6 kann man S zu einem Stern S' erweitern, der genau die beiden Randbögen α_p und β_q hat und P_1 sonst nicht trifft. γ sei ein eingebetteter Weg auf S', der α_p und β_q verbindet. γ zerlegt S' in zwei Halbebenen. Sei S^1 eine der beiden Halbebenen und U eine reguläre Umgebung von S^1 .

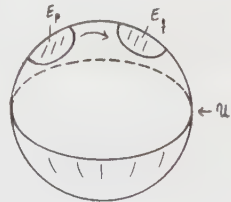
vereinigt mit regulären Umgebungen
von E_p und E_q .



U ist eine triviale Zelle mit drei Randebenen, wovon zwei E'_p und E'_q parallel zu E_p bzw. E_q sind. In U existiert eine eigentliche Isotopie, die E'_p in die triviale Zelle bringt, die von E_q und E'_q in P_1 berandet wird. Dabei wird die dritte Randebene von U und damit $M' - U$ festgelassen. Führt man diesen Prozeß für alle Ebenen E_j mit $E_j \not\subset P_1$, $j \in \{2, \dots, m-1\}$, und eine Randebene von P_m durch, erreicht man, daß alle Ebenen

$E_1, \dots, E_m$ in P_1 liegen.

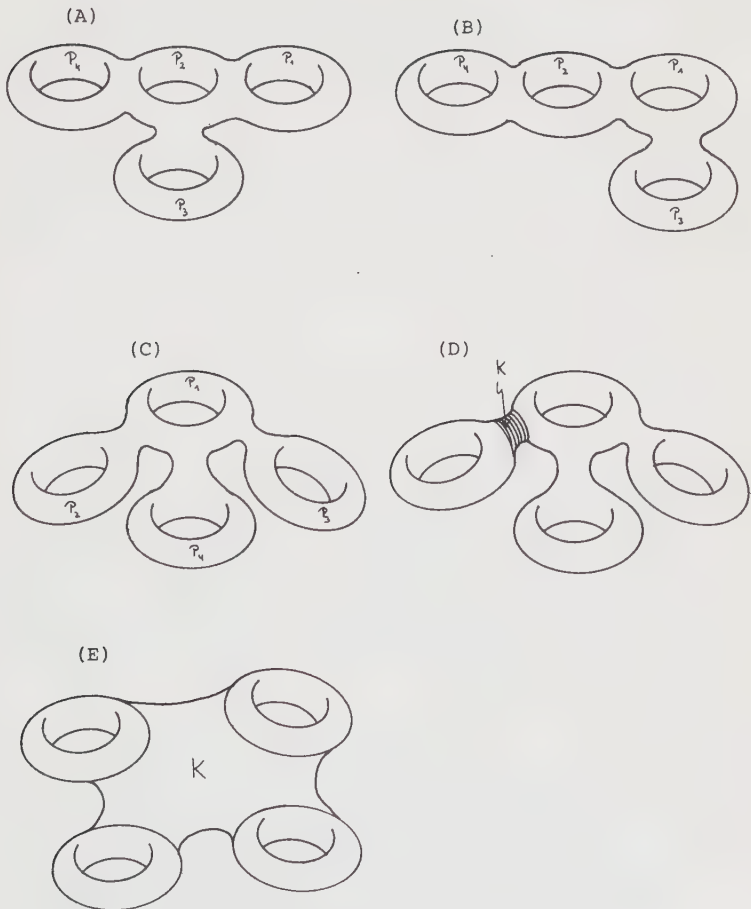
Sei K eine reguläre Umgebung von E_1 in P_1 . Wie oben existieren eigentliche Isotopien $H_2, \dots, H_m$ mit $H_i(E_i \times \{1\}) \subset K$. Die so konstruierte Mannigfaltigkeit M'' hat die gewünschte Zerlegung.



□

Wir wollen den Beweis von Hilfssatz 5.5 an einer Bilderfolge verdeutlichen:

5.8 BEISPIEL



Den Ausgangspunkt A können wir mit Hilfe der Sätze 5.5 und 5.7 folgendermaßen verbessern.

5.9 AUSGANGSPUNKT B

Die "Restmannigfaltigkeit", die wir noch zu untersuchen haben und mit M^* bezeichnen wollen, ist fast-endirreduzibel, offen und besitzt eine Zerlegung in eine triviale Zelle K und m $*$ -prime Summanden $P_1, \dots, P_m$, von denen jedes P_i genau eine Randebene E_i hat, mit der es an K angeklebt ist. Die wesentliche Ebene E liegt ganz in M^* , zerlegt M^* in zwei nichttriviale Teilmannigfaltigkeiten M_1 und M_2 , trifft die $E_1, \dots, E_m$ nur in Bögen und $E \cap E_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$.

SCHLUSS VON SCHRITT 3

5.10 DEFINITION

- (a) Ein $*$ -primer Summand P_j von M^* heißt ein spezieller Henkel, wenn der Abschluß jeder Komponente von $P_j - E$ eine triviale Zelle ist.
- (b) P_j sei ein $*$ -primer Summand von M^* und kein spezieller Henkel. Die Essenz von P_j , mit Y_j bezeichnet, sei der Abschluß in P_j der Komponente von $P_j - E$, die keine triviale Zelle ist. Wegen Hilfssatz 4.6 ist Y_j wohldefiniert.

Numeriere die $P_1, \dots, P_m$ so um, daß $P_1, \dots, P_u$ die Summanden sind, deren Essenzen in M_1 und $P_{u+1}, \dots, P_s$ die Summanden sind, deren Essenzen in M_2 liegen. $P_{s+1}, \dots, P_m$ seien die speziellen Henkel.

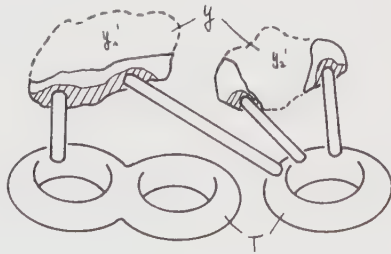
- (a) Jede Komponente von $cl(M_1 - (Y_1 \cup \dots \cup Y_u))$ ist ein (eventuell trivialer) verallgemeinerter Henkelkörper.

denn: Jede Komponente von $\text{cl}(M_1 - (Y_1 \cup \dots \cup Y_u))$ ist die Vereinigung von trivialen Zellen, von denen jede entweder der Abschluß einer Komponente eines P_j -E oder der Abschluß einer Komponente von K-E ist. Zwei dieser trivialen Zellen schneiden sich im Abschluß einer Komponente eines E_1 -E, also nach Annahme in Sternen. Daher erfüllt jede Komponente von $\text{cl}(M_1 - (Y_1 \cup \dots \cup Y_u))$ die Kriterien von Hilfssatz 4.1, ist also ein verallgemeinerter Henkelkörper.

□

Der Abschluß der Komponenten von $M_1 - (Y_1 \cup \dots \cup Y_u)$ sei mit T bezeichnet. Sei $j \in \{1, \dots, u\}$ und C eine Randkomponente von Y_j . Dann ist C die Summe von eigentlich in P_j eingebetteten Sternen und Teilsternen von E_j und so $T \cap C \neq \emptyset$.

Wir können nun den Hilfssatz 4.3 auf T und die Vereinigung der Es-senzen $Y_1, \dots, Y_u$ anwenden und erhalten so eine Familie verallgemeinerter Henkelkörper T' und für jedes $j = 1, \dots, u$ eine Teilmannigfaltigkeit Y'_j von Y_j , die homöomorph zu Y_j ist und die Eigenschaften von Hilfssatz 4.3 erfüllt.



(b) T' ist ein zusammenhängender, verallgemeinerter Henkelkörper mit zusammenhängendem Rand.

denn: $M^* = M_1 *_E M_2$ und so ist $\partial M_1 = E$. Für M_1 gilt aber auch

$\partial M_1 = \partial(T' \cup Y_1' \cup \dots \cup Y_u')$, womit der Rand von $(T' \cup Y_1' \cup \dots \cup Y_u')$ zusammenhängend sein muß. Angenommen T' hat zwei Randkomponenten S und S' . Wegen (iv) von Hilfssatz 4.3 gibt es zwei verschiedene Randkomponenten D und D' von $(Y_1' \cup \dots \cup Y_u')$, so daß $S \cap D$ und $S' \cap D'$ Sterne sind, D und D' sonst von T' nicht getroffen werden und S und S' keine gemeinsame Randkomponente von $(Y_1' \cup \dots \cup Y_u')$ treffen. Dann muß aber $S = S'$ sein, da ∂M_1 zusammenhängend ist.

□

- (c) Für $j = 1, \dots, u$ ist $Y_j' \cap T'$ die Vereinigung disjunkter Sterne, so daß jede Komponente von $\partial(Y_j')$ von genau einem Stern getroffen wird.

das folgt aus den Bedingungen (iii) und (iv) in Hilfssatz 4.3.

□

Jetzt seien $F_1, \dots, F_u$ disjunkte Sterne in $\partial T'$, so daß für $j = 1, \dots, u$ $Y_j' \cap T'$ im Innern von F_j liegt. $B_1, \dots, B_u$ seien disjunkte triviale Zellen in T' mit $B_j \cap \partial T' = F_j$ für $j = 1, \dots, u$.

Definiere $T'' = \text{cl}(T' - (B_1 \cup \dots \cup B_u))$.

- (d) Für $j = 1, \dots, u$ ist $Y_j' \cup B_j \approx_f P_j$.

das folgt aus (c) und den Hilfssätzen 4.4 und 4.5.

□

- (e) $M_1 \approx_f P_1 * \dots * P_u * T''$

denn: Nach Konstruktion ist $M_1 \approx_f (Y_1' \cup B_1) * \dots * (Y_u' \cup B_u) * T''$.

5.11 HILFSSATZ

Spezielle Henkel sind verallgemeinerte Henkelkörper vom Geschlecht 1.

BEWEIS

Sei P ein spezieller Henkel. Daß P ein verallgemeinerter Henkelkörper ist, folgt sofort aus der Definition. P ist fast-endirreduzibel und hat folglich nur endlich viele Henkel, da es sonst keine kompakte Menge C gäbe, so daß $C-P$ endirreduzibel ist. Also ist $\pi_1(P) = \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{p\text{-mal}}$ für ein $p \in \mathbb{N}$. Nach einem Theorem von Husch und Price [H-P, Theorem 3], finden wir einen Rand, der P zu einer kompakten 3-Mannigfaltigkeit $\bar{P}$ vervollständigt. Das heißt, es existiert eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit $\bar{P}$ und eine Einbettung $h: P \rightarrow \bar{P}$ mit $h(\text{int } P) = \text{int } \bar{P}$.

Angenommen, das Geschlecht von $\bar{P}$ ist größer als 1. Es existiert eine Scheibe D , eigentlich in $\bar{P}$ eingebettet, die $\bar{P}$ in zwei Henkelkörper $\bar{P}_1$ und $\bar{P}_2$ zerlegt, mit $(\text{Geschlecht } \bar{P}_1) \geq 1$ und $(\text{Geschlecht } \bar{P}_2) \geq 1$. Dann ist $D \cap P$ ein Stern S , der P in zwei nichttriviale Teilmannigfaltigkeiten zerlegt, was der Annahme widerspricht, daß spezielle Henkel $*$ -prim sind.

□

$$(g) \text{ (Geschlecht } T'') + \text{ (Geschlecht } U'') = m - s.$$

Beweis: T'' und U'' haben nur endlich viele Henkel, da sie fast-endirreduzibel sind. Damit ist $\pi_1(T'') = \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{t\text{-mal}}$ und

$\pi_1(U'') = \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{u\text{-mal}}$ für zwei Zahlen $t, u \in \mathbb{N}$. Nach dem Theorem von Husch und Price gibt es kompakte 3-Mannigfaltigkeiten $\bar{T}$ und $\bar{U}$ und

Einbettungen $h_t: T'' \rightarrow \bar{T}$, $h_u: U'' \rightarrow \bar{U}$ mit $h_t(\text{int } T'') = \text{int } \bar{T}$ und $h_u(\text{int } U'') = \text{int } \bar{U}$. Angenommen $(\text{Geschlecht } \bar{T}) + (\text{Geschlecht } \bar{U}) = t+u$ ist größer als $m-s$. Dann existieren $(t+u-1)$ Scheiben $D_1, \dots, D_{t+u-1}$ in $\bar{T} \cup \bar{U}$, die $\bar{T} \cup \bar{U}$ in $(t+u)$ Henkel zerlegen. Sei $D_i \cap (T'' \cup U'') =: S_i$ für $i = 1, \dots, t+u-1$. Dann sind $S_1, \dots, S_{t+u-1}$ wesentliche, disjunkte Sterne in $T'' \cup U''$, die $T'' \cup U''$ in $(t+u)$ spezielle Henkel $H_1, \dots, H_{t+u}$ zerlegen. Also

$$\begin{aligned} M &\approx_f (P_1 * \dots * P_s * T'' * U'') * P_{m+1} * \dots * P_n \\ &\approx_f (P_1 * \dots * P_s * H_1 * \dots * H_{t+u}) * P_{m+1} * \dots * P_n \\ &\approx_f (P_1 * \dots * P_s * P_{s+1} * \dots * P_m) * (H_{m-s+1} * \dots * H_{t+u}) \\ &\quad * P_{m+1} * \dots * P_n \\ &\approx_f M * (H_{m-s+1} * \dots * H_{t+u}) \quad \text{und } t+u > m-s. \end{aligned}$$

Dann existieren aber in M beliebig viele wesentliche, nichtparallele, eigentlich eingebettete Ebenen, da man die Zerlegung oben beliebig oft wiederholen kann. Ist $(t+u) < (m-s)$, liefert ein ähnlicher Schluß denselben Widerspruch.

□

Damit ist der Zerlegungssatz bewiesen.

5.12 ZERLEGUNGSSATZ

M sei eine offene, irreduzible, fast-endirreduzible 3-Mannigfaltigkeit mit einem Ende. Es gebe eine obere Schranke $z_M \in \mathbb{N}$, so daß $\text{card}(I) \leq z_M$ für jede maximale Menge $\{E_i\}_{i \in I}$ disjunkter, wesentlicher, nichtparallel-

leler, eigentlich in M eingebetteter und zerlegender Ebenen. Ist M keine triviale Zelle, ist M fast-homöomorph zu einer Sternsumme

$P_1 * \dots * P_n$ von $*$ -primen Mannigfaltigkeiten P_i , $i = 1, \dots, n$. Die Summanden P_i sind bis auf Reihenfolge und Fast-Homöomorphie eindeutig bestimmt.

□

6 MANNIGFALTIGKEITEN MIT ENDLICHEM GESCHLECHT IN ∞

EIN BEISPIEL

Eine große Klasse von Mannigfaltigkeiten, auf die sich der Zerlegungssatz 5.12 anwenden läßt, sind die Mannigfaltigkeiten mit endlichem Geschlecht in ∞ . Wir wollen hier diese Mannigfaltigkeiten definieren und dann zeigen, daß sie alle Voraussetzungen für den Zerlegungssatz erfüllen. Zum Schluß werden wir ein Beispiel für eine Mannigfaltigkeit mit endlichem Geschlecht in ∞ geben, das den Arbeiten [B1] und [B2] entnommen ist. Diese Mannigfaltigkeit wird aus mehreren Kopien des sogenannten "Whitehead Beispiels" konstruiert. J.H.C. Whitehead war bei dem Versuch, die Poincaré'sche Vermutung zu beweisen, auf eine offene, zusammenziehbare 3-Mannigfaltigkeit gestoßen, die nicht homöomorph zum R^3 ist (siehe [W]), und unter dem Namen "Whitehead Beispiel" bekannt ist.

6.1 DEFINITION

M sei eine offene 3-Mannigfaltigkeit. Das Geschlecht von M in ∞ ist die kleinste Zahl k , so daß es eine ausschöpfende Sequenz $\{C_n\}$ von M gibt, mit $(\text{Geschlecht}(\partial C_n)) \leq k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Existiert kein solches k , hat M unendliches Geschlecht in ∞ .

6.2 SATZ

M sei eine zusammenhängende offene Mannigfaltigkeit vom Geschlecht $k > 0$ in ∞ , die ein Ende hat. Dann existiert eine ausschöpfende Sequenz $\{C_n\}$ für M , so daß

- (i) ∂C_n hat das Geschlecht k ,
- (ii) C'_n , ∂C_n und $M - C_n$ sind alle zusammenhängend,

(iii) ∂C_n ist inkompressibel in $cl(M - C_0)$.

BEWEIS

[B2], 2.2 Lemma.

□

6.3 HILFSSATZ

M sei eine zusammenhängende, offene, irreduzible 3-Mannigfaltigkeit vom Geschlecht $k > 0$ in ∞ , die ein Ende hat. Dann existiert eine obere Grenze $z_M \in \mathbb{N}$ für M , so daß gilt: ist $\{f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow M \mid i \in I\}$ ein maximales System, wesentlicher, nichtparalleler und disjunkter zerlegender Einbettungen, so ist $\text{card}(I) \leq z_M$.

BEWEIS

Nach Satz 6.2 existiert eine ausschöpfende Sequenz $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von M mit

- (i) ∂C_n hat das Geschlecht k ,
- (ii) C_n , ∂C_n und $M - C_n$ sind zusammenhängend,
- (iii) ∂C_n ist inkompressibel in $cl(M - C_0)$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es existiert eine gemeinsame obere Grenze z_M für jedes System wesentlicher, disjunkter, nichtparalleler, eingebetteter Kurven in ∂C_n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Angenommen $\{f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow M \mid i \in I\}$ ist eine maximale Familie von Einbettungen und $\text{card}(I) > z_M$. Wir wählen $(z_M + 1)$ der Ebenen $f_i(\mathbb{R}^2)$, sage

$f_1, \dots, f_{z_M+1}$ aus. Für f_j , $j \in \{1, \dots, z_M+1\}$ existiert ein $m_j \in \mathbb{N}$ und eine Sequenz von Scheiben $\{D_n^j\}_{n \geq m_j}$ mit $f_j^{-1}(C_0) \subset D_{m_j}^j \subset \dots \subset D_n^j \subset D_{n+1}^j \subset \dots$,

wobei D_n^j eine Komponente von $f_j^{-1}(C_n)$ ist, und $f_j(\partial D_n^j)$ wesentlich in ∂C_n ist (Satz 3.3).

Es sei $m := \max\{m_1, m_2, \dots, m_{z_M+1}\}$. Dann ist $\{f_1(\partial D_n^1), \dots, f_{z_M+1}(\partial D_n^{z_M+1})\}$ für jedes $n \geq m$ ein System wesentlicher, disjunkter Kurven in ∂C_n . Da aber ∂C_n maximal z_M nichtparallele, disjunkte Kurven zuläßt, muß für zwei Einbettungen $f_i \neq f_j$, $i, j \in \{1, \dots, z_M+1\}$, $f_i(\partial D_n^i)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ in ∂C_n homotop zu $f_j(\partial D_n^j)$ sein. Nach Satz 3.5 sind dann aber f_i und f_j parallel.

□

6.4 SATZ

M sei eine zusammenhängende, offene, irreduzible 3-Mannigfaltigkeit von endlichem Geschlecht in ∞ . Ist M keine triviale Zelle, ist M fast-hömömorph zu einer Sternsumme $P_1 * \dots * P_n$ von $\ast$ -primen Mannigfaltigkeiten P_i , $i = 1, \dots, n$. Die Summanden P_i sind bis auf Reihenfolge und Fast-Hömömorphie eindeutig bestimmt.

BEWEIS

Hilfssatz 6.3 und Satz 5.12.

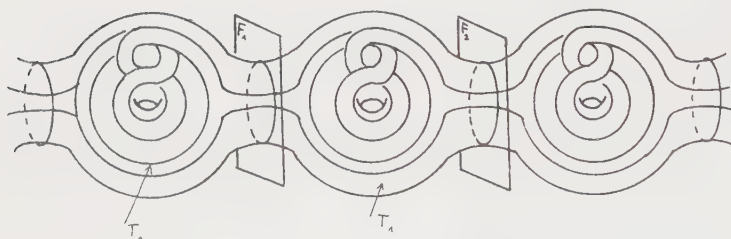
□

6.5 BEISPIEL

T_1 sei eine Vollbrezel vom Geschlecht k , die in das Gebiet $(0, k) \times \mathbb{R}^2$ eingebettet ist und unverknotet ist. Es sei $F_r = \{r\} \times \mathbb{R}^2$ und $F_r \cap T_1$ die Scheibe vom Radius 2 für $r = 1, \dots, k-1$. Es sei $T_1 \cap [r-1, r]$ ein einzelner unverknoteter Volltorus (siehe das Bild).

$T_0 \subset T_1 - \partial T_1$ sei eine Vollbrezel vom Geschlecht k , auch unverknotet

in $\mathbb{R}^3$, die wie in der Figur in T_1 liegt. $T_0 \cap F_r$ sei eine Scheibe vom Radius 1, konzentrisch mit $T_1 \cap F_r$, und $T_0 \cap [r-1, r]$ sei ein einzelner unverknoteter Volltorus.



Es existiert ein Homöomorphismus h von $\mathbb{R}^3$ auf sich, der T_0 auf T_1 abbildet und der auf F_r die radiale Ausdehnung um den Faktor 2 vom Zentrum der Scheibe $T_0 \cap F_r$, $r = 1, \dots, k-1$ ist. M sei $\bigcup_n h^n(T_0)$ (h^n bedeutet h n -mal angewendet). Dann ist M eine zusammenziehbare, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ der Form $P_1 * \dots * P_k$, wobei P_r das Geschlecht 1 in ∞ hat. Das Geschlecht von M in ∞ ist k .

P_r ist eine Kopie des Whitehead Beispiels. Ändert man die oben beschriebene Konstruktion, findet man eine überabzählbare Familie verschiedener 3-Mannigfaltigkeiten von endlichem Geschlecht in ∞ .

SYMBOLVERZEICHNIS

$\approx$	homöomorph
$\times$	Kreuzprodukt
$\subset$	Inklusion von Mengen
$\cup$	Vereinigung von Mengen
$\cap$	Durchschnitt von Mengen
$\in$	Element von
-	ohne
∞	unendlich
$\#$	zusammenhängende Summe
$\ast$	Sternsumme
$+$	Ebenensumme
∂X	Rand von X
$\text{int}(X)$	Inneres von X
$\text{cl}(X)$	Abschluß von X
$\text{fr}(X)$	Grenze (frontier) von X
[]	Literaturhinweis
$\square$	Beweisende

LITERATUR

- [B1] BROWN, E.M.: On contractible open 3-manifolds of genus 1
to appear
- [B2] BROWN, E.M.: Contractible 3-manifolds of finite genus at
infinity
to appear
- [B-B-F] BROWN, E.M.; BROWN, M.S.; FEUSTEL, C.D.: On properly embedding
planes in 3-manifolds
Proc. Amer. Math. Soc. 55 (1976), 461-464
- [B-T] BROWN, E.M.; TUCKER, T.W.: On proper homotopy theory for non-
compact 3-manifolds
Trans. Amer. Math. Soc. 188 (1974), 105-125
- [G] Gross, J.L.: A unique decomposition theorem for 3-manifolds
with connected boundary
Trans. Amer. Math. Soc. 142 (1969), 191-199
- [H-P] HUSCH, L.S.; PRICE, T.M.: Finding a boundary for a 3-manifold
Ann. of Math. (2), 91 (1970), 223-235
- [M] MILNOR, J.: A unique factorization theorem for 3-manifolds
Amer. J. Math. 84 (1962), 1-7
- [W] WHITEHEAD, J.H.C.: A certain open manifold whose group is
unity
Quart. J. Math. (2), 6 (1935), 268-279

Lebenslauf

- 26.3.1954 geboren in Castrop-Rauxel als Tochter der Eheleute Elisabeth (geb. Rabert) und Ulrich Dederek
- 1960-1964 Besuch der Wilhelmschule in Castrop-Rauxel
- 1964-1973 Besuch des Ernst-Barlach-Gymnasiums in Castrop-Rauxel
- 14.5.1973 Abitur
- WS 1973/74 Immatrikulation an der Ruhr-Universität Bochum
Fachrichtung: Mathematik, Wirtschaftswissenschaften
- SS 1975 bis
SS 1978 Beschäftigung als studentische Hilfskraft an der Ruhr-Universität Bochum
- 28.6.1978 Diplom in Mathematik
- 1.10.1978 bis
30.9.1979 Beschäftigung als Wissenschaftliche Hilfskraft an der Ruhr-Universität Bochum
- WS 1979/80 Studium am Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia
- 29.2.1980 Heirat mit Georg Breuer
- 1.3.1980 bis
31.7.1980 Beschäftigung als Wissenschaftliche Hilfskraft an der Ruhr-Universität Bochum
- 1.8.1980 Einstellung als Wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Ruhr-Universität Bochum

